研究開発・知識生産活動と生産性：不均斉発展－ボウモル氏病－カオス

小野　俊夫

I　問題の所在とボウモル氏病

経済社会の発展につれて進展する，いわゆるサービス経済化ないしソフト経済化のなかで，特に生産に投入される広義の人間労働の量と質によって産出物の価値そのものが評価される分野に比重が移ってきたし，今後もこの趨勢はさらに進展していくであろう。そのような分野としては，音楽，演劇など，さまざまな芸術活動，スポーツ，各種の教育・研究，高齢者介護や医療サービス，テレビ放映，各種の情報や知識の生産・供給活動，さらに犯罪や災害の防止・対策，そして伝統工芸品の制作，等々，数限りなく挙げられよう。現代社会が直面する多くの大きな諸問題の根源には，これらの分野の人件費したがってサービス・コストの持続的な上昇があると考えられる。

この問題は，まず Baumol (1967) によって取り上げられて解明されたが，その後，諸学者との論争を経て，そのモデル分析はいっそう強固なものになった。(モデルをめぐって展開された議論を考慮しつつ，そのモデルを検討したものが，小野 (1986) である。) その要点は次のようなものである。

まず問題の産出物は，その生産に投入された人間労働の量と質によって直接評価されるという点で，労働が他の生産要素と同様に最終生産物を得るための１手段として投入されるにすぎない，多くの工業産出物と

は異なることである。後者の需要者は，生産物価格と質が変わらない限り，投入される労働の量と質には関心をもたない。それぞれの生産活動には，労働の役割にこのような差があるために，技術構造の差が生じ，労働生産性の動向に差が生じるのである。すなわち，一方（多くの製造業）では，資本蓄積，革新，あるいは大規模経済の利益を通して，労働投入量の持続的かつ累積的な削減が実現されていくが，他方（上述の問題の分野）では，このようなことは許されず，労働生産性の上昇が起こりうるとしても偶発的なことにすぎない。

労働生産性が持続的かつ累積的に上昇していく部門の賃金率はこれに伴って上昇していくが，生産活動の技術構造の特質から労働生産性がほぼ固定されている部門においても，労働力市場が完全に閉鎖的でない限り（現実にはその通りであるが），賃金率はそれに伴って上昇していく。前者では生産性の上昇が賃金率上昇を相殺するのに役立つが，後者ではこのような相殺作用はずっと小さい。したがって労働生産性の上昇しない諸部門における相対費用（労働生産性の上昇する諸部門の生産費に対比した）は，必然的に上昇し，しかも持続的かつ累積的に限りなく上昇していくであろう。このような費用の上昇は，技術的に進歩する（労働生産性の上昇という意味での）諸部門の，まさにその進歩によってもたらされるものであり，これらの部門では資本蓄積や革新が停止してしまうと考えられる理由はまったくない。投入される人間労働の量と質によって産出物の価値が直接評価されるような経済諸活動それぞれの技術構造に固有の「強力な諸力（powerfull forces)」(Baumol (1967), p. 415) が作動しており，このためにこれらの諸活動における上述のような費用の上昇が不可避的となる。これを阻止しようとするいかなる努力も，一時的には効を奏するとしても，この根元的な趨勢を変えることはまったくできないのである。

Baumolはこのような確信に基づいて,「強力な諸力」によってもたらされる帰結を明らかにし,われわれが現在ならびに将来にわたって直面するであろう,さまざまな経済諸問題を解明するための興味あるモデル「技術的不均斉成長のマクロ・モデル」を構成したのである(Baumol (1967), Sects. 1-3, あるいはBaumol (1970), Sects. 1-4)。ここで最も重要で基本的な点は,技術構造上の特殊性によって労働生産性が上昇しない経済諸活動における,費用の不可避的な累積的上昇であるが,この仮説はその後Vandermeulen (1968) によって「ボウモル氏病 (Baumol's Disease)」と名づけられた。

さらにその後もBaumol自身の研究と他の人々との共同研究が続けられ,経験的資料の検討と分析に基づくそれらの成果が公刊され,Baumolの最初のモデルの修正が行われた (Baumol, Blackman, & Wolff (1985))。しかしなお,長期的には上述の「強力な諸力」が貫徹して作動していることが示され,ここではそれが「コスト病」と名づけられた (p. 807)。

労働生産性を引き上げがたい諸部門のコスト病あるいはボウモル氏病に起因する症候群 (ボウモル氏シンドロームと筆者は名づけた―小野 (1986), p. 5) は,前述のようなさまざまな分野でみられるから,それに基礎をおくモデル構成による分析は,幅広い諸分野の現実的な問題への適用が可能である。Baumol & Wolff (1992) は,研究開発と知識・情報の生産活動,および経済の生産性上昇率に起こりうる問題を解明するために,ボウモル氏病モデル (技術的不均斉成長モデル) を拡張して適用した。

まず取り上げられる問題は次のようなことである。研究開発・知識生産活動はコンピュータのようなハイテク装置と人間の知的労働とを用いるにもかかわらず,後にみるように,労働生産性を引き上げがたい部門

の活動に近い性格を有するから，ボウモル氏病に起因する諸問題が生起することになるのではないか，と懸念されることである。すなわち，他の生産物の価格に対する研究開発の産出物（知識・情報）の相対価格の上昇のために，時とともにその実質的利用が相対的に減少していくことになるのではないか。そしてそれに従事する科学者や専門的技術者の数も，将来にわたって相対的に逓減することになるのではないかと懸念される。そのような長期的な傾向は回避しえないものなのであろうか。Baumol & Wolff はボウモル氏病モデルを拡張して適用することによって，まずこの問題の解明を試みている (Sections 1-4)。そしてその必然性が論証される。

とすると，次に懸念される問題は，将来にわたって研究開発の成果による技術進歩が遅滞し，全体としての経済の生産性の上昇率も鈍化，もしくは低下することになるのではないかという問題である。研究開発・知識生産活動の産出物（知識・情報）が生産性上昇部門（製造工業部門）に投入されれば，この部門の技術進歩が促進され，ひいては経済の生産性が上昇することになりうるであろう。しかし前述の長期的傾向のために，研究開発・知識生産活動の進展が相対的に遅れ，またその産出物の相対的減少のために，生産性上昇部門の技術進歩と生産性上昇が遅滞することになるから，それは期待しえなくなる，と考えられるかも知れない。しかしながら，見かけほど事態は単純ではない。この問題を解明するためには，研究開発・知識生産活動と生産性上昇の間のフィードバック関係の動態分析がなされなければならない。次にボウモル氏病モデルに基づくフィードバック・モデルが構成されて，この問題が解明される (Sects. 5 & 6)。

後にみられるように，問題のフィードバック関係は簡単な形式の非線型定差方程式［以下の（16）式——Baumol & Wolff の（18）式］に集

約され，これによって研究開発・知識生産活動の産出量 y_t の時間的な運動経路（軌道）が分析されることになる。その軌道は，式のパラメータの値によって単純なものから複雑なものまで実に多様に変化する。パラメータがある値になると，説明困難なあらゆる形式の運動を合わせもつような「カオス（chaos）」の状況が現れることが明らかにされる。

以下，節を改めて，上述の諸問題に関する Baumol & Wolff の興味あるモデル分析を，上に略述した順序に従って考察・検討していくことにしよう。なお，後半の分析に用いられる上述の非線型定差方程式による軌道の分析やカオスに関してなじみのない読者のために，本筋から離れて，IV の 2（予備的考察）でこれらの問題についての必要最少限の簡単な解説を行う。そこでは数学的基礎も多く必要とされない。またそれは他から独立しているから，この問題だけに関心のある読者はそこだけを読まれても良いし，これらの問題に精通しておられれば，飛ばして先に進まれても差し支えない。

II　技術的不均斉成長モデル：ボウモル氏病モデル

1. 技術的不均斉成長モデル：ボウモル氏病モデル

まず Baumol (1967)（以後，原モデルと呼ぶ）においては，経済は 2 部門から成るものとされ，部門 1 は労働生産性が指数関数的に上昇していく「生産性上昇部門」であり，部門 2 は労働生産性が一定に留まる「生産性固定的部門」であるとされる。このような区分は恣意的なものではなく，生産活動における労働の役割に着目してかなり明確になされうる，とされている。すなわち，労働は他の生産要素と同様に最終生産物を得るための 1 手段として投入されるにすぎない（部門 1）のか，あるいは投入される労働の量（と質）によって産出物の価値が直接評価される（部門 2）のかという，当該生産活動の技術構造によって，労働生産性の動

向はある程度確定されるとされるからである。(なお詳しくは，小野(1986), pp. 3-4 参照。また，本稿で考察される Baumol & Wolff 以前の諸論文では，ここでの部門1が部門2，部門2が部門1とされていることに注意されたい[1]。)

各部門はそれぞれ労働投入 (時間) L_1あるいはL_2のみによって，一種類の産出量 y_1あるいは y_2を

$$(1)\quad y_t = cL_1e^{rt},\ \ y_2 = bL_2$$

により生産するものとされる。r は部門1の労働生産性上昇率である。また賃金率は両部門とも w であるとされるから，各部門の平均費用は，

$$(2)\quad AC_1 = wL_1/y_1 = w/ce^{rt},\ AC_2 = wL_2/y_2 = w/b$$

となる。以上から，生産性上昇部門の平均費用に対する生産性固定的部門の相対費用は，

$$(3)\quad AC_2/AC_1 = ce^{rt}/b$$

となり，時間経過とともに指数関数的に限りなく増加していく，とされるのである。これが，いわゆるコスト病あるいはボウモル氏病モデルの帰結の1つであるが，次の命題として示されている。(原モデルの命題1と同様である。ただし部門番号が逆になっていることに注意。)

命題1：生産性固定的部門の産出物の平均費用は，生産性上昇部門の平均費用に比して，相対的に限りなく上昇していく。

ついで Baumol, Blackman, & Wolff (1985) (以後，拡張モデルと呼ぶ) では，部門1と部門2の中間にあるような第3の部門を抜きにしては現実分析に耐ええないとの認識から，第3の部門として「漸近的生産性固定化部門」が加えられることになった[2]。この部門は，2種の投入物をおおむね一定の割合で用いて生産活動を行うものとされるが，その第1は部門1 (生産性上昇部門) の産出物 y_1であり，第2は部門2 (生産性固定的部門) の産出物 y_2もしくは労働自体 (あるいはこれらの一定の

組み合わせ）であるとされる（詳しくは，小野（1986), pp. 32-5 参照)。なお，この部門3が用いる第2の投入物がy_2のみであるか労働のみであるかによって，分析結果が影響を受けることはないとされるが，というのも，これらの投入物の価格はいずれも賃金のみに依存し，同様の動きを示すからである（Baumol & Wolff (1992), p. 357, n. 5 参照)。

このような漸近的生産性固定化部門に相当する現実の産業活動の例として，テレビ放送とコンピュータ利用によるデータ処理が挙げられている。前者の主要な投入は，エレクトロニック設備と人間によるプログラミングやライブ・パフォーマンスであり，後者のそれは，ハードウェアと高度な知的労働である（Baumol, Blackman, & Wolff (1985), pp. 807-8, また Baumol & Wolff (1992), p. 357でも挙げられた事例である)。

Baumol & Wolff (1992) ではさらに厳密な仮定がおかれ，この部門の投入・産出比率は固定されているとされる。すなわち，部門3の産出量y_3の生産に用いられる部門2および部門3の産出物をそれぞれy_{13}, y_{23}として，

（4） $y_{13}/y_3=k_1$, $y_{23}/y_3=k_2$

とされる。そして$k_2=1$となりうるように単位を設定することによって，部門3の平均費用は

（5） $AC_3=k_1AC_1+AC_2=k_1w/ce^{rt}+AC_2$

として与えられる。

労働単位で測ることにして，wは一定とされるから，上式の第3辺の第1項は時間とともに限りなくゼロに近づく。したがって，AC_3の動向は生産性固定的な部門2のそれに近づくとされる。そして次の命題が示される。

命題2：漸近的生産性固定化部門の平均費用の動向は，投入物の1部として用いる生産性固定的部門の産出物のそれに，漸近的に

近づいていく。

その理由は直感的にも明かであるとして，次のような説明もなされている(p. 358)。すなわち，生産性上昇部門1の産出物の費用の低下によって，まず漸近的生産性固定化部門3の実質平均費用が低下する。そして部門3の総費用に占める部門1の産出物の投入費用の割合は減少し，部門3の費用の動向は生産性固定的部門2のそれによって決定されるようになる。したがって，部門3の費用は最初は減少するが，将来その相対費用は上昇することになる，とされるのである。

漸近的生産性固定化部門の活動の事例として挙げられたテレビ放送とコンピュータ利用によるデータ処理は，いうまでもなく技術進歩の最先端にあるハイテク産業に属するが，驚くべきことに，その進歩性のなかにボウモル氏病の種子を宿しているとされるのである。すなわち（5）から明らかなように，部門1の生産性上昇率 r が高いほど，問題の部門の平均費用 AC_3の動向が生産性固定的な部門の AC_2のそれに近づく速度は速くなる，とされている。(この産業の問題について詳しくは，Baumol & Wolff (1992), p. 358-9, Baumol, Blackman & Wolff (1985), pp. 807-8, 小野 (1986), pp. 33-5 参照。)

さて，命題2の導出に際して，部門3における他の2部門の産出物の投入比率 k_1および k_2は便宜上一定とされた。次にこの仮定がはずされて，それらの比率が可変的な場合には結果はいかに影響を受けるかが吟味される (pp. 356 (par. 2)-60)。まず，(部門1からの投入に代替されて) 部門2からの投入比率 k_2が上昇していく場合には，容易に分かるように結果はさらに強化される。しかし部門2の産出物を相対的により多く投入することは，費用をいっそう高めることになりうるから，それは行われそうにない。(なお，生産性固定的部門の産出物に対する需要動向の厳密な分析については，小野 (1986), pp. 10-1 参照。)

すると，相対的にますます高価になる部門2からの投入に代えて，部門1からの投入がいっそう多くなされるようになるであろうが，次にこの場合が分析される。この場合，k_1は指数関数的に上昇していくのに対してk_2は低下していくものとされ，それらの上昇率と低下率の相対関係を考慮して数学的な分析が行われているが，ここでは，その帰結の要点のみを述べておくにとどめよう。すなわち，いずれにせよ，k_1は上昇していくのに対してk_2は低下していくのであるから，部門1の産出物をニュメレールとすれば，部門3の産出物単位当たりの部門1からの投入費用AC_3/AC_1は，必ずしも指数関数的とは限らないが，時間経過とともに上昇し続けるのである，と。

生産性上昇部門に対する生産性固定的部門と漸近的生産性固定化部門の相対的な平均費用の以上のような進展につれて，諸部門の産出物に対する需要の動向はいかなるものとなるであろうか。2部門の場合については，Baumol (1967) および Baumol (1970) によって分析され，帰結はそこでの「命題2」として示された（これについては詳しくは，小野 (1986), pp. 10-1 参照)。Baumol & Wolff はこの問題を3部門の場合について分析し，この「命題2」を拡張している。次にそれを考察しよう。

2．諸部門の産出物に対する需要

Baumol & Wolff はまず各部門の産出物に対する需要関数を構成し，ついで産出物間の相対的な需要動向の分析を行って，その帰結を導出する (Section 3 参照)。

このような需要の決定要因として，(1)生産性上昇部門と漸近的生産性固定化部門の生産性の動向によってもたらされる実質所得の変化に対する諸生産物需要の反応と，(2) 部門間の相対費用・価格の変化に対する諸需要の反応が考えられ，部門i ($i=1, 2, 3$) の生産物需要y_iは次式によって決定されるものと想定している。すなわち，所定の時点におけ

る経済の総実質所得を y とすると，（1）は $f^i(y)$ として示され，部門 i の生産物価格はその平均費用 AC_i に比例するものとし，y_i の価格弾力性を定数 E_i とすると，(2)は AC_i^{-Ei} として示されるから，y_i の需要関数を

$$(6)\quad y_i = f^i(y)\ AC_i^{-Ei} \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

として定式化している。

これより，$y_i^{1/Ei} = [f^i(y)]^{1/Ei}/AC_i$ となるから，

$$(7)\quad \frac{y_1^{1/E1}}{y_j^{1/Ej}} = g^j(y)\ \frac{AC_j}{AC_1} \qquad (j=2,\ 3)$$

が得られる。すべての i について，$O<E_i^* \leqq E_i \leqq E_i^{**} < \infty$ が成立するものとされ（E_i^* および E_i^{**} は定数)，（3）および（5）により，AC_j/AC_1 は最終的には限りなく上昇することになる，とされる。こうして次の命題が示される。すなわち，

命題3：すべての産出物の需要の価格弾力性がゼロと無限大の間にあり，需要への価格効果を需要の所得弾力性が相殺しうるほど大きくないならば，y_1 は最終的に，生産性固定的部門と漸近的生産性固定化部門のいずれの産出量に比しても，相対的に限りなく増加することになる。すなわち，これら2部門の産出量に対する相対的需要（生産性上昇部門に対する需要に比しての）は，究極的にゼロに近づいていく。

なお，この命題について注意すべき3点が指摘されている (p. 362, par. 1)。第1は，十分な時間経過の後に変数はその極限値に近づくが，それ以前にはいかなる事態が起こるのかに関してはほとんど述べられていない点である。第2は，部門2および3に対する需要は，部門1に対する需要に比して相対的に無に等しくなるとはいっても，それらの需要が絶対的に消滅することを意味しているのではない点である。そして第3は，

部門1への需要に比しての任意の部門への需要（たとえば国民の工業生産物と医療サービスとに対する需要）についてみると，命題3にある条件が逆になって，実質所得の効果が価格効果にまさることもありうる点である。確かにGNPに占める国民医療費の割合は時とともに上昇しているが，しかしその一部はこの部門の相対価格の急増によるものであり，なんらかの方法で測定したその実質量は製造部門のそれに比して相対的に減少しているはずである，とされている。(なお，この第3点に関する諸問題については，p. 362, n. 10 参照。)

以上のいわば拡張された技術的不均斉成長モデル（ボウモル氏病モデル）が適用されて，われわれの直面する問題が解明されるのである。

注

1）Baumol & Wolff, およびそれ以前の諸論文では，ここでの部門1は「技術的進歩部門」(technologically progressive sector)」あるいは「進歩部門(progressive sector)」と呼ばれ，部門2は「技術的非進歩部門(technologically nonprogressive sector)」あるいは「停滞部門（stagnant sector)」と呼ばれている。しかし部門2には教育や芸術などの活動も含まれるから，このような日本語訳は適切ではなかろうと考え，前稿では本文のような名称を用いたが，ここでもそれを踏襲した。

2）Baumol, Blackman & Wolff では，この部門は「漸近的停滞部門」(asymptotically stagnant sector)」と呼ばれているが，この日本語訳もそのまま使用することはやはり不適切であろう。前稿では「漸近的生産性固定化部門」の名称を用いたが，本稿でもそれを用いる。

III　研究開発・知識生産活動への相対的支出と雇用

1. 研究開発・知識生産活動の性格

さて，当面する問題の分析にボウモル氏病モデルを適用するために，まず研究開発・知識生産活動とはいかなる性格のものであり，3つの部門のいずれに属するものであるのかが検討される（Section 2 参照)。

研究開発・知識生産活動は，Baumol & Wolff によって，知識ないし

情報の生産に従事する産業部門の活動として把握され，その性格は，生産性固定的な部門2と漸近的生産性固定化の部門3の中間にあるものとされている。というのは，そのような活動は，人間の知的労働と，コンピュータのようなハイテク装置の利用（これは部門3に近い活動となる——小野（1986），pp. 32-5 参照）という，2種の投入物を用いるからである。その活動におけるこれら2種の投入比率は固定されたものではなく，現実にみられるように時間の経過とともに変化しうる。しかしそれら2種の投入物の費用は，いずれも最終的には生産性固定的部門の費用と同様の動向を示すことになるから，研究開発・知識生産活動は結局は部門3の活動にきわめて近いものになると解されるのである。

そこでボウモル氏病に起因する諸問題が生起することになるのではないか，と懸念されるのである。すなわち，研究開発の産出物（知識）の他の生産物に対する相対価格の上昇のために，時とともにその実質的利用が相対的に減少していくことになるのではないか。したがって研究開発支出額は絶対的にも，対GNP比率でも，増加していくとしても，その実質産出は，絶対的にも対GNP比率でも減少していくとともに，それに従事する科学者や専門的技術者の数もGNPに比して相対的に逓減することになるのではないか，と思われる。もしこのような長期的な傾向があるならば，将来，研究開発の成果たる技術進歩が遅滞し，全体としての経済の生産性の上昇率も鈍化，もしくは低下することになるのではないかと懸念されるであろう。

では，そのような長期的な傾向は回避しえないものなのであろうか。Baumol & Wolff は技術的不均斉モデル（ボウモル氏病モデル）を適用することによって，この問題の解明を試みている（Section 4)。次にそれを考察しよう。

2. 研究開発・知識生産活動への相対的支出と雇用

Baumol & Wolff は解明すべき問題を，まず次の命題として示している（p. 363)。

命題４：産出物価格はその平均費用に比例するものとすると，生産性上昇部門（製造産業部門）の産出物の価値に対する漸近的生産性固定化部門（研究開発・知識生産部門）の産出物の価値，

$$\frac{y_3\text{の価値}}{y_1\text{の価値}}=\frac{AC_3y_3}{AC_1y_1}$$

は，上昇していくが，他方，生産性上昇部門の産出物の価値に対する漸近的生産性固定化部門の労働力の相対的な大きさ，

$$L_3/AC_1y_1$$

は，減少していく。

ついで，この命題が成立しうることが証明される。(５)が妥当するものと想定されるから，ある時点 t^* を越えると AC_3 は AC_2 に近似することになる。したがって（３）より，

$$(8)\quad \frac{AC_3y_3}{AC_1y_1}=\frac{ce^{rt}}{b}\quad\frac{y_3}{y_1}$$

が得られる。

ここで新たに，

$$(9)\quad L_3=y_3/m \qquad (m=\text{定数})$$

が仮定され，さらに

$$(10)\quad y_3/y_1=he^{-r3t} \qquad (O\leqq r_3\leqq r)$$

が成立しうるものとされる。すると，(８) および (10) から，

$$(11)\quad \frac{AC_3y_3}{AC_1y_1}=\frac{che^{(r-r3)t}}{b}$$

が得られるが，これは時間経過とともに増加していくであろう。

また，L_3/AC_1y_1については，y_1をニュメレールとして，$P_1=AC_1=1$とされるから，（9）および（10）を考慮して，

(12)　$L_3/AC_1y_1=y_3/y_1m=he^{-r_3t}/m$

が得られるが，これは減少していく。

以上により，(11) と (12) は矛盾するものではなく，同時に成立しうることが証明され，したがって命題4が証明されたわけである。

この結果は仮定［(8）および（9）式］によって限定されたものではなく，さらに一般性を有するものである，とされる (p. 364)。すなわち，問題の根源は，研究開発・知識生産活動の漸近的生産性固定化という性格にある，とされるのである。このために，その活動の産出物（知識）y_3の相対費用が上昇していくのである。換言すれば，生産性上昇部門の産出物 y_1の絶対的労働費用が減少していくのである。したがって，y_3に対する支出が相対的に増加していくとしても，その相対費用の上昇に及ばないならば，y_3は y_1に比して相対的に減少するであろう。y_1をニュメレールとすると，y_3は y_1の価値に比して相対的に減少していく。また，L_3は y_3に比例して変化するであろうから，L_3は y_1に比して相対的に減少していく，とされるのである。

さて，これらの帰結，y_3の y_1の価値に比しての相対的減少と，L_3の y_1に比しての相対的減少とから，現実に起こりうる問題として懸念されることは，前にも指摘したように，そのために技術進歩と全体としての経済の生産性の上昇が妨げられるのではなかろうか，ということであろう。研究開発・知識生産活動の産出物の生産性上昇部門への投入によって，この部門の技術進歩が促進され，ひいては経済の生産性が上昇することになりうるであろう。しかし L_3の y_1に比しての相対的減少のために，研究開発・知識生産活動の進展が相対的に遅れ，また y_3の y_1の価値に比しての相対的減少のために，生産性上昇部門の技術進歩と生産性上昇が遅

滞することになれば，それは期待しえなくなると考えられるからである。しかしながら，筋道は見かけほど単純ではない。この問題を解明するためには，研究開発・知識生産活動と生産性上昇の間のフィードバック関係の動態分析がなされなければならない。では次に，Baumol & Wolff (Sects. 5 & 6) のモデル分析を考察することにしよう。

IV　研究開発・知識生産活動と生産性

1．研究開発と生産性のフィードバック・モデル

まず，分析モデルが構成される (Section 5 参照)。労働生産性の上昇率は知識の産出水準によって決定されると考えられるが，期間 t における知識の産出水準を y_t とすると，研究開発・知識生産部門の外部（生産性上昇部門）の次期の労働生産性の上昇率 r_{t+1} は，

(13)　$r_{t+1} = a + by_t$

として定式化される。もちろん b は正であるが，後にみられるように，a が正であるか負であるかは事態の進展に大きな差をもたらす。a が正であれば，経済に内生的な知識の産出がまったくなくても，生産性は「自生的な率」a で上昇していくが，a が負であると，内生的な知識の産出がなければ生産性は低下していくことになるからである。

a が正であればもちろん，かりに負であっても y_t が十分に大でそれを相殺して余りがあるならば，外部（生産性上昇部門）の生産性上昇によって，研究開発・知識生産部門（漸近的生産性固定化部門）の平均費用と，したがって相対価格は上昇し始める。このことは，その部門の産出物（知識）の価格 P_t の上昇率は r_t に比例するものとして，

(14)　$(P_{t+1} - P_t)/P_t = vr_{t+1}$

として定式化される。さらに価格の上昇はこの部門の産出物（知識）に対する需要を変化させるが，ここではその関係が，時間的な需要の価格

弾力性を E として（単純化のために E は定数とされる），

(15)　$(y_{t+1}-y_t)/y_t=-E\ (P_{t+1}-P_t)/P_t$

として示される。

これらの3式によって問題のフィードバック・ループが完結されることになる。すなわち，知識の産出水準 y_t によって次期の生産性上昇率 r_{t+1} が (13) によって決定されると，これにより知識の価格上昇率が (14) によって決定される。そしてこの価格上昇率により知識に対する需要の変化率が (15) によって決定されると，再び (13) によって次の期の r_{t+2} が決定され，以後同様に順次進行していくことになる。ところで，y の増加による r の上昇のために P の上昇率が高まると，y が減少し，そして r も低下する。これは研究開発・知識生産活動が漸近的生産性固定化の性格を有することによるものであり，これが経済の生産性上昇への阻止要因として作用する点が指摘される (pp. 364-5)。（また，生産性上昇部門1の生産性上昇率が低下せず，たとえ一定のままであるとしても，その部門の産出物に対する経済の支出割合（すなわち設備投資率）が時とともに減少していくようなことになれば，全体としての経済の生産性上昇は減退していくことも指摘されている (p. 365, n. 11)。）

しかしまた，r の低下は P の上昇率を低下させることにより，y の減退に歯止めをかけ，ひいては r の低下をくい止めることになるであろう。このようなフィードバックの動態は，以上の3式から導出される定差方程式によって解明される。

(14) の v と (15) の E との積 vE を k とおけば，上の3式から

$(y_{t+1}-y_t)/y_t=-k\ (a+by_t)\ ;\ k=vE>0$

が得られるが，これより

(16)　$y_{t+1}=(1-ka)\ y_t-kby_t^2\ ;\ kb>0$

が得られる。y_t に関して非線型のこの定差方程式は問題のフィードバッ

ク関係を集約的に示すものであり，これによって y_t の時間的な運動経路を解明することができる。また，生産性上昇率や価格上昇率のそれも (13) と (14) から容易に知ることができる。

後にみられるように，(16) によって決定される y_t の時間的運動経路（軌道）は，単純なものから複雑なものまで実に多様である。それらの形態はパラメータ ka の値に依存するが，それがある値になると，説明困難なあらゆる形式の運動を合わせもつような「カオス（chaos)」の状況が現れることが知られている。次に進む前に，本題から離れてこの問題について予備的な考察を行っておこう。(なお，次節は (16) よりもう少し簡単な定差方程式によって決定される y_t の軌道の問題や，特にカオスについてなじみのない読者への簡単な解説であり，数学的基礎も多く必要とされない。これらの問題に精通しておられれば，飛ばして先に進まれても差し支えない。)

2．予備的考察：軌道の多様性とカオス

(16) において，$1-ka=kb=\omega>0$ となる特殊な場合には，非線型定差方程式 (16) は

(＊1)　$y_{t+1}=\omega y_t(1-y_t)$

となる。(本節では前後の節の諸式と区別するため，式番号に＊を付して本節のみの通し番号にした。)

(＊1) は y_{t+1} が y_t の2次関数であることを示しているから，y_t を横軸に y_{t+1} を縦軸に測り，非負領域のみを考えれば(後に明らかになるように負領域の y_t の均衡点は不安定となるから)，原点 ($y_t=0$, $y_{t+1}=0$) から出て横軸上の点 ($y_t=1$, $y_{t+1}=0$) に至る上方に凸の放物線となる（図1参照)。時間とともに変化する y_t に対応して，次期の y_{t+1} はこの曲線上で決定される。曲線上の点はその運動状態を示すから「状態点」といわれ，このようなグラフは「位相図もしくは相図 (phase diagram)」とい

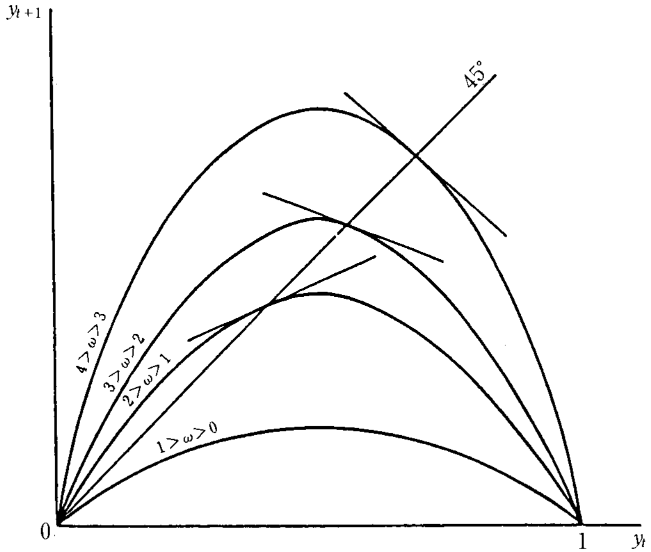


図１

われる。曲線の勾配は，

（＊２）　$dy_{t+1}/dy_t = \omega - 2\ \omega y_t$

となるから，頂点の座標は，

（＊３）　$\hat{y}_t = 1/2,\ \hat{y}_{t+1} = \omega/4$

となる。この横座標は一定であるから，頂点は ω の増加とともに垂直に上昇する。しかしながら，（＊１）から分かるように y_tのとりうる最高値は１であるから，y_{t+1}も同様に１を越えることはない。したがって $\omega/4 \leqq 1$，すなわち

（＊４）　$0 < \omega \leqq 4$

である。

そしてこの曲線は，原点を通る45度線（$y_{t+1} = y_t$を示す）と原点の１点で，あるいは原点と他の点との２点で交わるが，それらの交点が均衡点にほかならない。ここで $y_e = y_{t+1} = y_t$とおくことにより，これらの均衡値，

（＊５）　$y_{e1}=0$ および $y_{e2}=1-1/\omega$

が得られる。また，それぞれの均衡点における曲線の勾配は，（＊２）により y_e の値に応じて，

（＊６）　$y_t=y_{e1}=0$ の場合，ω

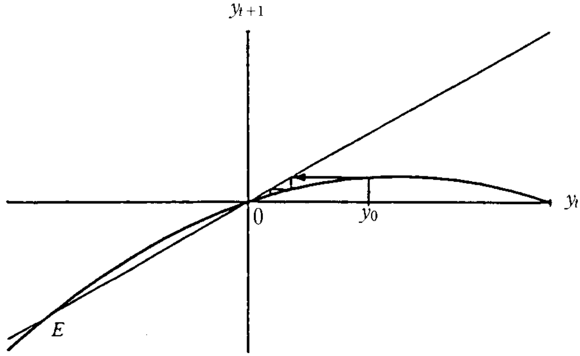
あるいは

（＊７）　$y_t=y_{e2}=1-1/\omega$ の場合，$2-\omega$

となる。$\omega\leqq 1$ であれば均衡点(非負領域の)は原点のみとなるが，ω の上昇につれて原点における勾配は上昇する(図１参照)。ω が１を越えるとプラスの均衡点が現れるが，そこでの勾配は始めは右上がりであるが，ω の上昇とともに低下していき，$\omega=2$ のとき水平（頂点が均衡点）になる。さらに ω が上昇すると勾配は右下がりになって傾斜は急になっていく。

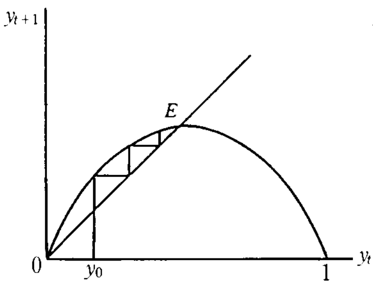
さて，y_t の軌道（時間的経路）であるが（図２，３，４参照），y_t が最初から均衡点に存在すれば y_t は変化しない。そこで均衡点は「不動点（fixed point)」あるいは「定常点」ともいわれる。いま，均衡点以外の横座標 y_0 から出発するものとすると，次期の y_1 はそれに対する曲線上の点の縦座標である。これを横軸に移すには，その点から引いた水平線と45度線の交点の横座標をとればよい。この y_1 から同様にして y_2 を求め，・・・と y_t の経路を辿ることができる。

次に，均衡点の安定性の考察に進もう(図２—図６参照)。定常点から少し離れた点から出発して，しだいにその定常点に近づいていくならば，その定常点は安定である(図２の原点，図３および４の点 E)。この場合，定常点はその近傍のすべての軌道を引きつけるという意味で，「アトラクター(attractor)」といわれる。アトラクターは必ずしも点であるとは限らない。たとえば四辺形の軌道があって，その内側および外側のどこから出発しても，極限的にその軌道上を運行することになりうるならば，



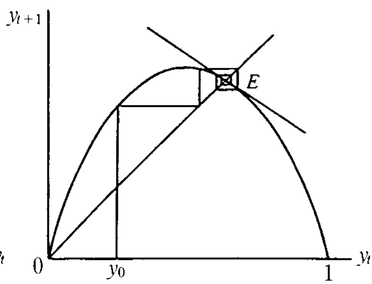
y_{t+1}
y_t
0
y_0
E

図 2



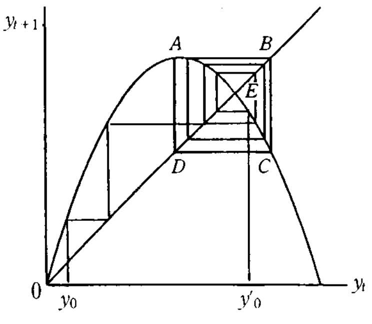
y_{t+1}
E
0
y_0
1
y_t

図 3



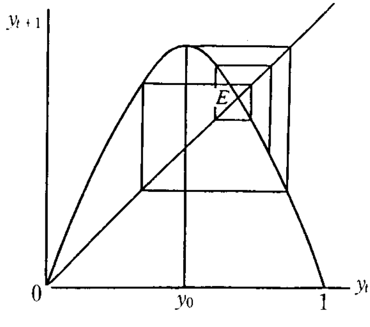
y_{t+1}
E
0
y_0
1
y_t

図 4



y_{t+1}
A
B
E
D
C
0
y_0
y'_0
y_t

図 5



y_{t+1}
E
0
y_0
1
y_t

図 6

この軌道はアトラクターであり，安定である(図5の四辺形 $ABCD$)。このような軌道は「極限循環 (limit cycle)」あるいは「極限周軌道」といわれる。(これは1920年代にファン・デル・ポール (B. Van der Pol) によって，非線型運動方程式により解明されたが，その後，経済理論の分野でも景気循環のモデル分析に応用されている。これについては，Goodwin, Chap. 10, および訳注を参照。)

これとは逆に定常点からしだいに遠ざかっていくならば，その点は不安定である(図3―図6の原点，図5と6の点 E)。この場合の定常点はその近傍のすべての軌道を跳ね返すという意味で，「リペラー (repeller)」といわれる。また，アトラクターとリペラーの性質を半分ずつ有する定常点あるいは極限周軌道もありうる。それから，ある方向に少し離れた点から出発するとそれに引きつけられるが，別の方向に離れた点からでは跳ね返されて近づけないような定常点あるいは周軌道がそれである。

以上の図から，定常点が安定か不安定かは，その点における y_{t+1} 曲線の勾配の絶対値に依存していることが分かるであろう。すなわち，原点の定常点については，(＊6)より，$\omega \leqq 1$ であれば安定(図2)，$\omega > 1$ であれば不安定 (図3―図6) である。また，原点と異なる定常点 E については，(＊7)より，$-1 < 2-\omega < 1$，すなわち，$1 < \omega < 3$ であれば安定である(図3と4)。しかし $1 < 2-\omega$，すなわち $\omega < 1$ であるか(この場合の定常点は図2のように負領域に存在する)，あるいは $2-\omega \leqq -1$，すなわち $3 \leqq \omega$ となる (図5と6) と不安定である。$1 = 2-\omega$，すなわち $\omega = 1$ の場合には，曲線は原点において45度線に接し，定常点は原点のみになる。そこで負領域ではリペラー，正領域ではアトラクターである。

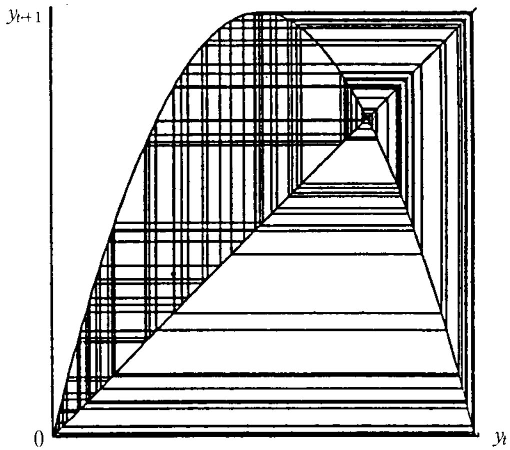
さて，原点と異なる安定な定常点は負領域には存在しないことが分か

ったから，正領域の定常点 E と y_tの軌道についてさらに考察しよう。$1<\omega<3$ であれば定常点はアトラクターであるが，$\omega\leqq 2$ ならば曲線の頂点は45度線上もしくは下方にあり（定常点における勾配 $\geqq 0$），軌道は単調である（図3）。ω（<3）が2より大きくなると頂点は45度線を越えて上昇し，定常点の勾配は負となり，軌道は安定的な振動となる（図4）。$3\leqq\omega$ で勾配 $\leqq -1$ となると，定常点の近傍での多様な極限循環（図5）が現れうるとともに，さまざまな形態の不安定な振動（たとえば図6）が現れてくる。いずれも定常点は不安定であるが，極限周軌道の場合はアトラクターであり，y_tはどこから出発してもこの安定的な周期運動に吸引されていくことになる。（極限周軌道の周期は図5のように2期間のみとは限らず，ω の上昇につれて4期間，8期間，・・・と倍増する偶数期間のものが順次現れてくる。さらに ω が上昇すると奇数期間の循環が現れてくる。その期間は初めは長いが，ω の上昇につれて短縮していき，$\omega=3.8284$において3期間循環となる。これについて詳しくは，May (1976) に依拠しグラフを援用して分析している Baumol & Benhabib (1989), pp. 84-92, および Ahmad (1991), pp. 361-8参照。)

すでにみたように $\omega\leqq 4$ であるが，ω がさらに大きくなって4に近いある値（ほぼ3.83 : Baumol & Wolff, p. 367, n. 12 参照）に達し，勾配がさらに急なものになると，説明困難なあらゆる形式の運動を合わせもつような「カオス」の状況が現れる。すなわち，「アトラクターかつリペラーの双方，また非周期的運動は安定的かつ不安定なものの双方，すべてが一括混合されている」(Goodwin (有賀訳) pp. 18-9) ような状況である。そして ω がさらに4に近づくに従って，多様な分岐が次々に現れてくるのである。この状況の1つを示す図解として，有賀祐二教授が苦労して作成された示唆的なグラフがある（Goodwin（有賀訳), p. 21, 図1.9 および図1.10。なお，訳者解説，特に pp. 194-8 参照）。借用して図7として，

ここに掲げておこう。

みられるように，y_tの時間的経路は完全な決定論的関係（completely deterministic relation）（＊１）から生み出されてくるにもかかわらず，非決定論的な確率的運動をするかのように現れてくる。これは，カオス運動の特に重要な２つの性質の１つであるが，もう１つは，運動形態がパラメータ ω の値と y_tの初期値（出発点）のわずかな変化にきわめて敏感に反応して変化することである（Ahmad, p. 355, pars. 2 & 3 ; p. 368 & Fig. 18. 5, また Baumol & Benhabib, p. 79 参照）。このことを知るために，同一の初期値（y_0＝0. 99）から出発するとして，ω のわずかな差（3. 935



t＝0～100.

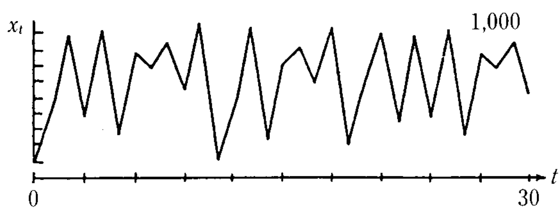


図７

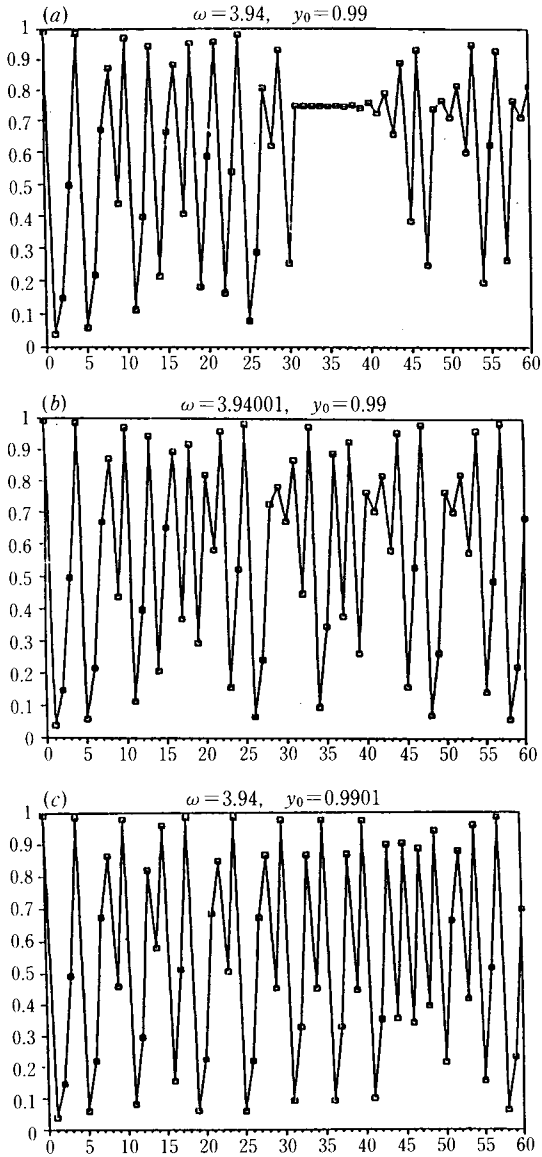

(a) ω=3.94, y0=0.99
(b) ω=3.94001, y0=0.99
(c) ω=3.94, y0=0.9901
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60

図 8

と3.94)によって軌道がいかに異なりうるかが，Baumol & Benhabib により グラフで示された (pp. 92-4, & Fig. 6)。Ahmad は，さらに微少な ω の差（3.94と3.94001）による軌道の変化と，ω（=3.94）は一定のもとでの初期値 y_0の差（0.99と0.9901）による軌道の変化とをグラフに示しているので (p. 368, & Fig. 18.5)，借用してここに掲げておこう。前者の効果は図８の a と b との比較により，後者の効果は図の a と c の比較により明らかであろう。

さて，カオス運動の重要な第１の性質は，経済理論のさまざまな分野に大きな影響を及ぼすであろう。まずは景気循環・経済成長理論，均衡・不均衡動学，完全予見ないし合理的期待形成に基礎をおく諸理論，等々への影響である(Medio(1992), pp. 8-18参照)。また第２の性質から予想されることは，同一のパラメータと初期条件のもとでも，コンピュータによって描き出されるカオス的状況は，コンピュータ計算に指定する精度の差（倍精度(double precision)か単精度(single precision)か）によっても大きく異なりうる(Ahmad, p. 368 & Fig. 18.5(d)参照)，ということである。さらに，y_tが所定の軌道を進んでいく途上で外生的ショックを受けると，以後の軌道は大幅に変化しうるであろうことも予想される。これらのことは統計的分析上の課題となろう（この点については，Baumol & Benhabib, pp. 79, 92-5, & n. 9, および Baumol & Quandt (1985) 参照)。そしてまた，観察される時系列は，確率項をもつ安定的線形体系から現れてきたものなのか，カオス的動態を生み出す決定論的非線形体系から現れてきたものなのかを識別するという課題もある(Baumol & Benhabib, pp. 100-3, Scheinkman(1990), p. 35 & Sect. II 参照)。

では，予備的考察を終えて，問題のフィードバック関係が集約化された (16) によって決定される軌道の考察に進むことにしよう。(特にカオ

ス問題に関心をもたれた読者のために，稿末の「付録」で，カオス理論の出現のいきさつについて簡単に解説し，基本的な参考文献を挙げておくので，参照されたい。)

3．フィードバック・モデルの分析

前節で考察の対象とされたのは（＊1）の形式の非線形定差方程式であり，問題の (16) におけるパラメータを，$1-ka=kb=\omega$ としたものであった。したがって（＊1）に関連する諸式は，(16) については変更されることになる。以下。再び Baumol & Wolff による分析（p. 365, eq. (18) 以下参照）の考察に移るが，これまでの予備的考察の結果をも参考にしつつ考察していくことにしよう。

まず，(16) を再掲しておこう。

(16)　$y_{t+1}=(1-ka)\,y_t-kby_t^2$

この非線型定差方程式のグラフも原点を通る一山型の曲線になるが，（＊1）のそれと異なる点は，第1に，横軸上の点（$y_t=(1-ka)/kb$, $y_{t+1}=0$）が定点でなくパラメータ a（k と b は一定として）の変化によって移動することである。第2の差は，パラメータ（$1-ka$）の増加とともに，頂点は垂直にではなく，右上方に上昇していくことである。このことは次のようにして知られる。

(16) の勾配は，（＊2）から

(17)　$dy_{t+1}/dy_t=(1-ka)-2kby_t$

に変わる。また，頂点の座標（＊3）は，

(18)　$\hat{y}_t=(1-ka)/2kb$,

$\hat{y}_{t+1}=(1-ka)^2/4kb$

となる。頂点が非負領域に存在するためには，$0\leqq 1-ka$ でなければならない。また，この領域の y_t の最高値は（$1-ka)/kb$ であるから，$\hat{y}_{t+1}$ も同様であり，$(1-ka)^2/4kb\leqq(1-ka)/kb$ である。すなわち，

(19)　$0 \leqq 1-ka \leqq 4$，すなわち，$-3 \leqq ka \leqq 1$

であるが，これは（＊4）に対応するものである。さて，$(1-ka)=0$ のとき頂点は原点上にあるが，$(1-ka)$が増加していくにつれて頂点は右上方に上昇していく。そして $\hat{y}_t=(1-ka)/2kb=\hat{y}_{t+1}=(1-ka)^2/4kb$，すなわち $(1-ka)=2$ となるとき，45度線上にあり，さらに $(1-ka)$ が増加すれば頂点は45度線の上側に出て上昇する。

均衡値（45度線との交点の座標）は（＊5）に対して，

(20)　$y_{e1}=0$ および $y_{e2}=-a/b$

となる。そして（＊6）と（＊7）に対応するそれぞれの定常点（均衡点）における曲線の勾配は，

(21)　$y_t=y_{e1}=0$ の場合，$(1-ka)$

および

(22)　$y_t=y_e=-a/b$ の場合，$(1+ka)$

となる。

さらに分析を進めるためには，パラメータの値が吟味されなければならない。当然 b は正であるが，$ka=vEa$ の値については，Baumol & Wolff は次のような理由から，

(23)　$vEa=ka<1$

と仮定している。すなわち，生産性上昇率に対する知識の価格上昇率の反応係数を表す(14)の v は，1をわずかに上回る程度であろうし，(15)の知識の需要の価格弾力性 E は2を大きく上回ることはないであろうし，また (13) における $y_t=0$ の場合の「自生的な」生産性上昇率 a 〈の絶対値〉はきわめて小であろう，という理由によってである (p. 366)。

しかし a が正か負のいずれになるかは明かでないとされ，$a>0$ の場合と $a<0$ の場合とについて分析される。

まず，定常点の存在領域が考えられる。$a>0$ であれば，(21) により

均衡点 $y_{e1}=0$ （原点）における勾配（$1-ka$）<1，そして（22）により均衡点 $y_{e2}=-a/b$（原点の左側）における勾配（$1+ka$）>1 となるから，グラフ（位相図）は図２のようになる。Baumol & Wolff によっては考慮されていないが，$a=0$ であれば，均衡点は原点のみとなり，そこでの勾配は１となり，曲線は正負の全領域において45度線の下方に存在する。したがって $a\geqq 0$ の場合には，正領域において曲線は45度線の下方に存在し，この領域に定常点は存在しない。

これに対して $a<0$ の場合には，均衡点 $y_{e1}=0$ （原点）における勾配（$1-ka$）>1，そして均衡点 $y_{e2}=-a/b$ （原点の右側）における勾配（$1+ka$）<1 となる。したがってグラフは図３―図６のようなさまざまなケースになりうるが，定常点は正領域に必ず存在することになる。

次にこれらの図（Baumol & Wolff のものとすべてが同一とは限らない）を援用して，a が正の場合と負の場合について，y_tの時間的な運動経路（軌道）と均衡の安定性が明らかにされる。

$a>0$ の場合：図２から分かるように，均衡点 $y_{e1}=0$ （原点）はアトラクターで安定であるが，左側の均衡点 $y_{e2}=-a/b$ はリペラーで不安定である。図示されているように，y_tは原点に向かっていき，極限的にはゼロとなる。これとともに生産性上昇率も低下していき，a に収束する。また $a=0$ の場合は，均衡点は原点のみとなり，y_tの負領域では不安定であるが，正領域では安定であり，$a>0$ の場合と同様の結果になる。

$a<0$ の場合：内生的な知識の産出がなければ，生産性が低下していく場合であり，事態は前の場合と逆になる。原点 $y_{e1}=0$ は不安定であるが，右側の均衡点 $y_{e2}=-a/b$ は安定あるいは不安定となりうる。（$1-ka$）$\leqq 2$，すなわち $ka\geqq -1$ であれば（Baumol & Wolff では $ka>-1$ とされているが，ここでは-1以上としておく），図３のように曲線の頂点は45度線上もしくは下方に存在し，均衡点 E における勾配（$1+ka$）

は非負となる。均衡点 E はアトラクターであり，y_tはそれに単調に接近していく。これに対して $ka<-1$ であれば，図４―図６のように頂点は45度線の上側に現れ，均衡点における勾配は負となり，y_tは均衡点の回りを振動することになりうる。

次に進む前に，a が正であるか負であるかによって異なりうる以上の軌道の差異について，Baumol & Wolff の説明をみておこう（pp. 367-8 参照)。$a>0$ 場合は，y_tはゼロに向かっていくが，その間，(13) により次期の生産性は上昇し続けるから，知識の価格 P_tも（14）によって上昇し続けるため，(15) により知識の需要量に対する抑圧効果として作用し続けうるのであり，これは y_tがすでにゼロになったとしてもそうなのである，とされる。これに対して $a<0$ の場合は，y_tがプラスではあるがゼロに近いと，$a+by_t<0$ となるため生産性は低下し始め，知識の価格も下落するから，その需要は促進され，図３―図６のようないずれのケースにおいても，y_tはある点までは増加していく，とされるのである。

興味ある現象が起こりうるのは，頂点が45度線の上側に現れる $ka<-1$ の場合であるから，これについてさらに考察しよう（p. 367 参照)。$-2<ka<-1$ であれば，正領域の均衡点 E における曲線の勾配（$1+ka$）は，図４のように負ではあるが -1 より大であるから，安定的な振動が生じる(すなわち，振動しつつ定常点に収束する)。$ka\leqq-2$ であれば $1+ka\leqq-1$ となり，定常点はリペラーになって，実に多様な形態の循環や振動が生起するようになる。ka の絶対値が増加するにつれて，初めは図５のように，均衡点の近傍での安定な循環運動（極限循環ないし極限周軌道）が現れ，その周期は偶数で２，４，８，16，・・・と倍増していく。やがて極めて長い奇数期間の循環が現れるようになるが，その周期は短縮していき最終的には３期間の循環になる。

そして $-ka$ がある程度の大きさになり，右下がりの勾配 $1+ka$ がさ

らにけわしく傾斜するようになると，図７のような説明困難なあらゆる形式の運動を合わせもつようなカオスの状況が現れてくる（Baumol & Wolff, p. 367, n. 12 参照)。しかもその運動形態は，パラメータ ka の値と y_t の初期値の微妙な変化に対して敏感に反応して変化する(なお，前節の最後の５パラグラフも参照)。

４．一般化

以上の分析は（13），（14），（15）に基づいて導出された（16）によってなされてきたが，図２―図６，および図７によって示唆されるようなモデルの特性は，それらの式の特別な形式に依存するものではなく，一般性を有するものであることが，次に示される(Section 6 参照)。このために，まず（13)―(15）が一般的な形式に書き換えられる。すなわち，

(13*)　$r_{t+1}=a+f(y_t)$，$f'>0$，$f(0)=0$

(14*)　$(P_{t+1}-P_t)/P_t=h(r_{t+1})$，　$h'>0$，$h(0)=0$

(15*)　$(y_{t+1}-y_t)/y_t=g((P_{t+1}-P_t)/P_t)$，　$g'<0$，$g(0)=0$

とされる。これらの式から，（16）に対応する基本的な定差方程式，

(24)　$y_{t+1}=y_t g(h(a+f(y_t)))+y_t$

が得られるが，ここで，$g(h(a+f(y_t)))=F(y_t)$ として，

(16*)　$y_{t+1}=y_t F(y_t)+y_t$

とされる。

そしてまず，この定差方程式のグラフは，これまでの諸図と同様に原点を通る「一山型」となることが証明される。ついで，原点（$y_{e1}=0$）は均衡点となり，a の正負によって安定か不安定になるが，図２のように，$y_{e2}<0$ となる均衡点は存在するとしても必ず不安定であることが証明される。また，$a>0$ の場合には，図２のように正領域では曲線は45度線の下側に存在するから，安定な均衡点は原点のみとなり，$y_{e2}>0$ となる均衡点は存在しないことが証明される。さらに，$a<0$ の場合には，図

3以下のように曲線は45度線の上側に出て上方から45度線と交わるから，原点はリペラーとなり，$y_{e2}>0$ となる均衡点は存在するが，その安定性と y_t の軌道は均衡点における曲線の勾配に依存し，既にみられたようなさまざまな形態の軌道が現れうることが解明される。(これらの証明の詳細は，Baumol & Wolff, pp. 369-70 参照。)

以上で明らかにされたように，(13)―(15)の場合にも一般化された場合にも，$y_{e2}>0$ となる均衡点が存在してさまざまな形態の軌道が現れうるのは，$a<0$ となる場合に限られていた。しかし (14*) と (15*) における仮定，$h(0)=0$ および $g(0)=0$ をはずして，$h(0)<0$ および $g(0)>0$ とするならば，$a>0$ であっても，$a<0$ の場合と同様にさまざまな形態の軌道が現れうることが明らかにされる(p. 370)。さて，(16*) から

$$(25) \quad y'_{t+1}=F+y_tF'+1, \quad y''_{t+1}=2F'+y_tF''$$

が得られる。$y_t=0$ において，上式は $F+1$ となり，$F(0)=g(h(a+f(0)))=g(h(a))$ となる。$a>0$ であると，$F(0)>0$ となりうるから，原点における曲線の勾配は1を上回るため，グラフは図3以下のようになりうる，とされるのである。

V　結論的覚書

以上において，研究開発と知識・情報の生産活動，および経済の生産性上昇率に起こりうる問題を解明するために，ボウモル氏病モデル（技術的不均斉成長モデル）を拡張して適用した Baumol & Wolff の分析を考察した。労働生産性を引き上げがたい諸活動の技術構造に固有の「強力な諸力」は，この領域でも作動しており，その帰結はまず一般的に成立する命題4として示された。すなわち，他の生産物の価格に対する研究開発の産出物（知識）の相対価格の上昇のために，時とともにその実

質的利用が相対的に減少していき，知識・情報の生産活動に従事する科学者や専門的技術者の数も，将来にわたって相対的に逓減することになる，とされたのである。

しかしこの帰結から，将来にわたって研究開発の成果による技術進歩が遅滞し，全体としての経済の生産性の上昇率も鈍化，もしくは低下することになるであろう，と短絡的に結論することはできない。見かけほど事態は単純ではないからである。次にこの問題を解明するために，研究開発・知識生産活動と生産性上昇ないし低下の間のフィードバック関係の動態が分析された。この関係は簡単な形式の非線型定差方程式[(16)式]に集約されるが，これにカオス理論が適用されて研究開発・知識生産活動の産出量 y の時間的な運動経路（軌道）が解明された。その軌道は，式のパラメータ(特に労働生産性の自生的な変化率 a)の値によって単純なものから複雑なものまで実に多様に変化しうることが明らかにされた。$0 \leqq a$ で $0 < 1-ka \leqq 1$ であると，定常点は負領域の点と原点(もしくは原点のみ）となるが，前者はリペラー（不安定均衡)，原点はアトラクター（安定均衡）であり，漸近的に y はゼロとなり，生産性上昇部門（研究開発・知識生産活動部門の外部）の労働生産性上昇率 r は a になる。$a < 0$ で $0 \leqq 1+ka < 1$ であると，原点はリペラー（不安定均衡）となるとともに（負の定常点は消滅して）非負の定常点 E（$y_{e2}=-a/b$）が現れるが，これはアトラクターであり，軌道は単調で漸近的に y は $-a/b$ となり r はゼロになる。また $-1 < 1+ka < 0$ であれば定常点 E はアトラクターであるが，軌道は減衰振動で y は $-a/b$ の回りを振動しつつ漸近し，それに応じて r は正負の値をとりつつゼロに漸近する。$1+ka \leqq -1$ であると，定常点はリペラーとなり，定常点の近傍でのさまざまな形態の極限循環ないし極限周軌道となる場合も起こりうるが，パラメータがある値になるとカオスの状況が現れることが明らかにされ

た。

また，以上の結果は，フィードバック・モデルの基礎にある仮定[(13)，(14)，(15) 式] に厳密に依存するものではなく，一般性を有するものであることが論証された。より一般的な仮定のもとでは，a が正の場合にも，a が負の場合にみられたような多様な軌道が現れうることも示された。

ここで強調すべき点は，Baumol & Wolff も述べているように(p. 372)，研究開発活動と生産性の変化率の関係が相互依存的に内生的に把握されていることである。研究開発への支出増加は，いくらかの遅れを伴うが他部門の生産性上昇に寄与する。しかしながら，研究開発部門の貢献の結果たる他部門の生産性上昇そのものが，研究開発の相対費用を押し上げることになる。研究開発活動のまさに成功のなかに，その後のこの活動の産出物への需要に対する阻害要因――問題の種子――が宿されているのである。コスト病あるいはボウモル氏病に起因する症候群（ボウモル氏シンドローム）は，ここにもみられるのである。

付　録

特にカオス問題に関心をもたれた読者のために，カオス理論の出現の興味あるいきさつについて簡単に解説し，基本的な参考文献を挙げておこう。すぐにみるように，カオス理論が世に現れたのはそう古いことではない。(といわれてはいるが，カオスという語こそ用いられなかったがその数学は1800年代からひそかに進められてきたそうである。しかし研究が加速化されるのは，やはり計算機，特にコンピュータの利用が可能になってからのことである。)数学や物理学の分野ではいち早く大きな研究テーマのひとつになり，多くの研究が行われ成果が発表されてきた。それは非線形力学（nonlinear dynamics――この語は経済学では非線形

動学と訳されている）の領域であるが，まもなくそれ以外の広い分野にも影響が及び，経済学においても1980年代になってからマクロとミクロのそれぞれの分野の分析に応用されるようになってきた。

まず，カオス理論の出現の事情からみよう（数式は全くなくエピソードも豊富で読み易い，グリック（上田監修・大貫訳）(1991)，そして数式はあるが分かり易い，山口昌哉（1986）を参照)。

人口学や生物学の分野では，早くから「ロジスティック」と呼ばれる式によって人口や動植物の個体の増加動向を説明しようとする試みがなされてきたが，ある期間やある種族には当てはまっても，当てはまらない期間や種族があることも判明し，より一般的な数式の探求がなされてきた（山口，pp. 50-75)。しかしまた生物学や生態学の分野でも，例外を除けば，個体数は不規則に変動するものであり厳密なものではないから，一定の数式を当てはめることはできない，とする学者たちもいる（グリック，p. 138)。さらに数学や物理学，気象学や天文学の分野でも，ある種の流体の運動（たとえばポットの中で沸騰する湯の流れ）や，天候の変化や宇宙での出来事をいかに数学的にとらえて分析するかの研究が，多くの学者によって多方面でなされてきた。また経済学の分野では，さまざまな計量経済学モデルが開発されて，過去のデータへの当てはめや将来の予測が試みられてきた。それらの学問分野，そして他の分野でも，研究対象とされる諸現象はおおむねランダムな（確率的な）要素が含まれていると解されて，現実的な理論を作るために，人工的に確率項やノイズが加えられて処理されてきた。

しかし1960年代にはいると，いくつかの学問分野において，一見無秩序に思われる諸現象でもコンピュータによって数値的に描き出しうることが示されるようになった。他方，そのような現実の諸現象を単純な非線形の数式でくまなく模すことが可能であるとの認識が育ってきた（グ

リック，p. 22)。たとえば，MIT（マサチューセッツ工科大学）のローレンツ（Edmund Lorenz）は，コンピュータによる数値的な天候モデルがランダムに見えながらも秩序を有する現象を打ち出すことを，偶然に発見した（詳しくは，グリック，pp. 25-37参照)。その現象は，非周期性と，初期値に対する鋭敏な依存性という，カオスの重要な性質を有していたのである（p. 46)。ローレンツは天候の問題を離れ，３本の非線形方程式体系によって流体の(カオス的な)対流を生み出しうることを示し，1963年に論文「決定論的非周期的な流れ」として発表した（グリック，pp. 45-59，その内容については，山口，pp. 88-94，もしくは竹山協三（1991)，pp. 116-21参照。後者は数式を用いずグラフのみによって解説されている)。この前後から，物理学，力学，数学などの分野の諸学者や，さらに日本の電子工学者，ソ連の数学者や物理学者，フランスの天文学者たちが，ローレンツの業績に匹敵するような業績を表し始めた（たとえば京都大学の上田睆亮教授――グリックの翻訳の監修者でもある――の業績については，山口，pp. 116-23，ソ連の事情については，グリック，pp. 134-5参照)。

しかしながら国際的にはともかく，アメリカ国内でも，細分化された各専門分野ごとに分かれて相互独立的に研究が進められていたために，それらの研究成果が統合されてさらによい成果が生み出されるということにはならなかった。このような状況のなかで，オーストラリア（理論物理学専攻）からハーバード大学（応用数学研究）を経てプリンストン大学に移り，生態学の研究に没頭し始めたロバート・メイは，先行者たちの業績をよく知らぬままに，カオス問題の解決の糸口を開くことになった（グリック，pp. 123-31, 134-42；山口，pp. 75-86, 95-104参照)。ローレンツが３本の方程式を用いていたのに対して，メイはこの分野で以前から用いられていたロジスティック方程式を，本稿の（＊１）に対応する

形式に変換し，１本の非線形方程式を用いてコンピュータによる数値実験を行ったのである（もっとも，その式が得られるまでにも長い歴史があったのであるが――これについて関心のある読者は，山口，pp. 50-75参照)。それは，パラメータの変化とともに軌道の形態がいかに変わるかを，コンピュータを利用して明らかにしようとした研究であった。画期的な発見は，パラメータがあるクリティカル（臨界的）な値を越えるとカオスの状況が現れるということであった（結果の図解については，山口，pp. 79-86参照)。メイはそれを「きわめて複雑な軌道（very complicated orbit)」の状態といい，「カオス的（chaotic)」といった。この実験結果はMay (1974) として，その後またMay (1976) として発表された。(稿末の参考文献にみられるとおり，1974年論文名には“Chaos”の語もある。ちなみに，カオスはコスモス (cosmos＝整然と調和のとれた秩序) に対する語であり，ギリシヤ神話において天地創造以前の混沌をさし，またその状態を象徴する神の名でもある。)

他方，また1973年に戻るが，メリーランド大学の数学教授のジェームズ・ヨークと大学院生のリー（台湾出身の李天岩）は，ローレンツの前記の1963年論文を読む機会に恵まれた (この事情については，山口，pp. 95-6，およびグリック，pp. 116-22参照。後者の説明は詳しいが，重要な役割を果たすことになるリーの名はどうした訳か出てこない)。彼らはその最後の部分――決定論的な方程式体系がランダムな数列を生み出すことになるとする部分――に大きな関心をもち，この問題に共同して取り組んだ。メイのことは知らずに，後に「リーとヨークの定理 (The Li-Yorke Theorem)」として有名になる定理をまず発見し，ついで苦心の末，翌年（メイの最初の論文が発表された年）にその証明を終えた。はからずもこれによって，メイの数値実験による画期的な発見（パラメータの値とカオス領域の関係）が数学的に証明されることになったのである。「３周

期はカオスを意味する（Period Three implies Chaos)」と題されたこの短い論文は，事情あってすぐには公刊されなかった。しかしこれらの3人の学者の努力によって，「カオス」という語が数学の術語として，ここに初めて誕生したのである。その後，彼らはメイと話し合う機会を得て，証明についての補足を加えた論文が，Li and Yorke (1975) として公刊された。(「定理」に関して，またリーから直接聞いた話とされる論文の公刊に至るまでの興味深い物語については，山口，pp. 95-104参照。)

以上からも分かるように，カオスは抽象的な世界にとどまらず，現実に観察されるさまざまな現象にみられる。煮えたぎるポットの湯，カップのコーヒーに混じりゆくミルク，ジョッキに注がれるビールの泡，小川のせせらぎ，大海の波，空に浮かぶ雲，心臓の鼓動の乱れ，混雑した街路の人の流れや車の動き，物価や株価の動向，GNPの変動，・・・，等々，こうしてカオスの研究は学問の諸分野の枠を越えて，科学全般と関わりをもつようになった（グリック，p. 17)。まさにカオスは学際的な研究の対象であり，その理論はわれわれにとっても身近なものなのであり，その応用面も限りないといえる。ごく身近なところでは，さまざまなストレンジ・アトラクターを美麗なカラーで描き出す，おなじみのコンピュータ・グラフィックス（CG）がある。

さて，カオスについての一般的な入門書としては，すでに掲げた3冊がある。理論そのものの解説ではなく，研究者たちのエピソードも交えながら理論の発展を辿った，グリック（上田監修・大貫訳）(1991)，研究の歴史もかえりみながら理論の解説がなされる，山口昌哉(1986)，そして数学は用いずグラフのみで理論が解説される，竹山協三（1991）である（なお，竹山（p. 131）では，グリックの書物は非専門家のアメリカの新聞記者によるものであり，内容は広範にわたり正確で，しかも大変おもしろい，と推奨されている)。経済学の分野のカオスについてのガイ

ドとしては，Baumol and Benhabib（1989）とScheinkman（1990）およびMedio(1992)のCh. 1 & Part IIが挙げられる（なお，前者のp. 80, n. 1には，さまざまなテーマにカオス理論を適用した諸論文が紹介されているが，マクロ経済の循環的およびカオス的な動態の可能性を示したのは，あのメイが加わった共同論文，May and Beddington（1975）がおそらく最初であったろう，とされている。)。また，前者と他の文献にも基づいて書かれたものに，Ahmad (1991) がある。そして，Goodwin, R. M.（1990）・有賀祐二訳(1992)の，特に第1章と訳者解説を参照されたい。その他，さらに進んだ研究を望まれれば，上記の諸論稿に挙げられた文献を参照されたい。なお，『経セミ（経済セミナー)』（日本評論社) 1993. 4-1994. 3に連載の西村和雄・矢野誠「経済成長とカオス」もある。

参考文献

Ahmad, S. (1991) : "Theory of Chaos and Economic Fluctuaions," in *Capital in Economic Theory : Neo-classical, Cambridge and Chaos*, Edward Elgar Publishing, Ltd.

Baumol, W. J. (1967) : "Macroeconomics of Unbalanced Growth : The Anatomy of Urban Crisis," *American Economic Review*, June.

——— (1970) : Chap. Eighteen in *Economic Dynamics*, 3rd edition, The Macmillan Co.

———, S. A. B. Blackman, and E. N. Wolff (1985) : "Unbalanced Growth Revisited: Asymptotic Stagnancy and New Evidence," *American Economic Review*, Sept.

———, and J. Benhabib (1989) : "Chaos: Significance, Mechanism and Economic Applications," *Journal of Economic Perspectives*.

———, and R. E. Quandt (1985) : "Qhaos Models and their Implications for Forecasting," *Eastern Economic Journal*, Jan. -Mar.

———, and E. N. Wolff (1992) : "Feedback Between R & D and Productivity Growth: A Chaos Model," in *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Benhabib (ed.), Princeton Univ. Press.

Gleick, J. (1987) : *Chaos-Making a New Science*（上田睆亮監修・大貫昌子訳(1991) グリック『カオス——新しい科学をつくる——』新潮文庫)。

Goodwin, R. M. (1990) : *Chaotic Economic Dynamics*, Oxford Univ.Press（有

賀祐二訳（1992）『カオス経済動学』多賀出版）。

Li, T. and Yorke, J. (1975) : "Period Three Implies Chaos," *American Mathematical Monthly*.

May, R. M. (1974) : "Biological Population with Nonoverlapping Gensrations : Stable Points,Stable Cycles, and Chaos," *Science*, CLXXXVI (645-7).

———, (1976) : "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics," *Nature*, June 10.

———, and J. R. Beddington (1975) : "Nonlinesr Difference Equations : Stable Points, Stable Cycles, Chaos," unpublished manuscript.

Medio, A. (1992) : *Chaotic Dynamics : Theory and Applications to Economics*, Cambridge Univ. Press.

Vandermeulen, A. J. (1968) : "A Remssion from Baumol's Disease : Ways to Publish More Articles," *Southern Economic Journal*, Oct.

Scheinkman, J. A. (1990) : "Nonlinearities in Economic Dynamics," *Economic Journal*, 100 (*Conference* 1990).

竹山協三（1991）：『カオス――自然の乱れ方――』（ポピュラー，サイエンス）裳華房。

山口昌哉（1986）：『カオスとフラクタル――非線形の不思議――』（ブルーバックス）講談社。

小野俊夫（1986）：『経済社会の発展とボウモル氏病』早稲田社会科学研究，第33号。

追記：本稿の作成に着手した時点（昨年末）では，私はカオス理論についてほとんど無知であった。それでも主として依拠した Baumol and Wolff（1992）の主旨は理解できるし，本稿をまとめることに支障はないようにも思われた。正月早々に最初のワープロ原稿をまず打ち終えた頃，昨春に有賀祐二教授からご連絡を頂き参加させて頂いた「非線形問題研究会」のことを思い出した。この研究会はかねてより大和瀬達二教授が主催され，それまでもしばしば開かれてきたものである。有賀教授のご連絡は大和瀬教授のご推薦によるものであった。当日の研究発表の１つに田中辰雄教授の「景気循環はカオスと見なしうるか」と題するものがあった。教授のご発表とご出席の錚々たる諸先生によって醸し出された研究会の雰囲気を思い出し，カオス理論に対する私の関心は急速に高まった。末筆ながらこの機会を借りて，大和瀬教授，有賀教授，田中教授はじめ，研究会の諸先生に感謝申し上げます。そして遅ればせながら勉強を始め，読者のお役に立てればとも思い，急遽，予備的考察（IVの２）と付録を追加した次第である。